EXERCICE 32

Partie A

$f(x) = 1 + x - e^{\frac{-x}{2}}$

1)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x - e^{\frac{-x}{2}}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 + x - e^{\frac{-x}{2}})$

$X = -\frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1-2X - e^{X}) = \lim\limits_{X \to +\infty} X(\frac{1}{X} - 2 - \frac{e^X}{X}) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} - e^{\frac{-x}{2}} = 0$

d'où D : $y = x + 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $(+\infty)$

c) $f(x) - (x+1) = - e^{\frac{-x}{2}} \leq 0$ d'où $(\mathcal{C})$ est au dessous de D

2) – a) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} e^{\frac{-x}{2}} > 0$

b)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

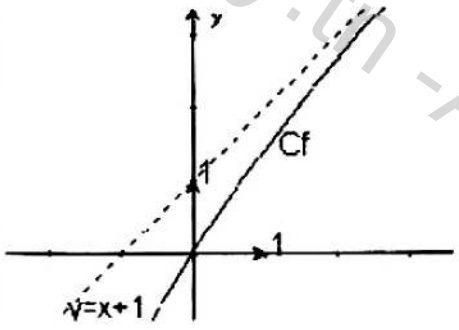
3)

* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + 1 - \frac{e^{\frac{-x}{2}}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x e^{\frac{x}{2}}} = +\infty$ ($x e^{\frac{x}{2}} \to 0^-$)

Donc $(\mathcal{C})$ admet une B.I parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$

* $f(0) = 0$



Partie B

$n > 0$

1) $A_n = \int_n^{n+1} ((x-1) - f(x))\, dx$

$A_n = \int_n^{n+1} e^{\frac{-x}{2}}\, dx = [-2e^{\frac{-x}{2}}]_n^{n+1}$

$A_n = 2[e^{\frac{-n}{2}} - e^{\frac{-n+1}{2}}]$ u.a

2) $A_n = 2[e^{\frac{-n}{2}} - e^{\frac{-n}{2}} . e^{\frac{-1}{2}}] = 2\, e^{\frac{-n}{2}} (1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

$A_{n+1} = 2\, e^{-\frac{n+1}{2}} (1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$

$A_{n+1} = 2\, e^{-\frac{1}{2}} . e^{\frac{-n}{2}} (1 - \frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{1}{\sqrt{e}} A_n$

D'où (A_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{e}}$

3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{e}})^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}$

$S_n = \frac{2}{\sqrt{e}} (1 - \frac{1}{\sqrt{e}}) . \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{e}})^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{2}{\sqrt{e}} (1 - e^{\frac{-n}{2}})$

S_n : représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$; la droite D et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = n + 1$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n = \frac{2}{\sqrt{e}}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn